Correction DS mécanique

Exercice 1 : Etude cinématique /5 pts

1. Norme de l'accélération de G.

Par dérivations successives, on obtient les coordonnées de la vitesse (en $m.s^{-1}$) puis de l'accélération (en $m.s^{-2}$) :

$x(t) = 8{,}0\ t + 2{,}0$	$v_x(t) = 8{,}0$	$a_x(t) = 0$
$z(t) = -5{,}0\ t^2 + 15\ t + 3{,}0$	$v_z(t) = -10\ t + 15$	$a_z(t) = -10$

D'où la norme de l'accélération : $a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2}$ = **$10\ m.s^{-2}$**

2. Norme de la vitesse initiale

De même, on obtient la vitesse à t =0 selon : $v_0 = \sqrt{v_x^2(0) + v_z^2(0)} = \sqrt{8{,}0^2 + 15^2}$ = **$17\ m.s^{-2}$**

3. Angle α

D'après le schéma, on a : $\tan\alpha = \dfrac{v_{z0}}{v_{x0}} = \dfrac{15}{8{,}0}$ = 1,875 ; soit **α = 62°**

4. Hauteur atteinte par la bille

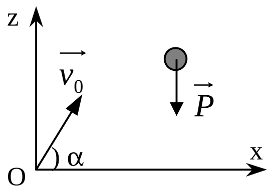
A l'instant t_s , où la bille atteint le sommet de la parabole, la vitesse selon (Oz) est nulle donc :
$-10\ t_s + 15 = 0$ soit $t_s = 1{,}5\ s$

La hauteur h est donc : $h = z(t_s) = -5{,}0\times1{,}5^2 + 15\times1{,}5 + 3{,}0 =$ **$14{,}3\ m$**

Exercice 2 : Tir d'un boulet de canon /12,5 pts

A. Etude de la trajectoire du boulet dans l'air

1. Bilan des forces



Le boulet n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$ tel que : $\vec{P} = m\vec{g}$

2. Equations horaires

Par application de la seconde loi de Newton dans le référentiel galiléen (xOz), on obtient :

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} = m.\vec{a} \Leftrightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \boxed{\vec{g} = \vec{a}}$$

Par intégrations successives, on obtient les équations horaires de la vitesse puis de la position :

accélération :

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases} \xrightarrow{\text{intégration}}$$

vitesse :

$$\begin{cases} v_x(t) = cste = v_x(0) = v_0\cos\alpha \\ v_z(t) = -gt + v_z(0) = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{intégration}}$$

position

$$\begin{cases} x(t) = (v_0\cos\alpha)t + x(0) = (v_0\cos\alpha)t \\ z(t) = -1/2.gt^2 + (v_0\sin\alpha)t + z(0) = -1/2.gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{cases}$$

La détermination des constantes d'intégration a été faite grâce aux conditions initiales :

position : $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$ vitesse : $\vec{v_0}\begin{cases} v_x(0) = v_0\cos\alpha \\ v_z(0) = v_0\sin\alpha \end{cases}$

3. Expression de t_1 :

à l'instant t_1, on a : $z(t_1) = 0$, d'où : $-½.g.t^2 + (v_0.\sin\alpha)t = 0$ soit : $½.g.t_1 = v_0.\sin\alpha$

D'où $\boxed{t_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$

4. Vitesse à l'instant t_1

$$\begin{cases} v_x(t_1) = v_0 \cos\alpha \\ v_z(t_1) = -g\dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} + v_0 \sin\alpha = -v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

D'où la norme : $v(t_1) = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)} = \sqrt{v_0^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \sqrt{v_0^2} = v_0$

Par conséquent, le boulet touche l'eau avec une vitesse égale à sa vitesse initiale.

5. Equation de la trajectoire

On exprime t à partir de l'équation de x(t) : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, puis on remplace dans z(t) :

$z(x) = -\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0(\sin\alpha)\left(\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)$ D'où : $\boxed{z(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x}$

6. Valeur de la vitesse initiale :

On a $\alpha = 45$ °, donc : $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ et $\tan\alpha = 1$

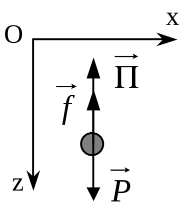
Le boulet tombe à 960 m du point de tir, donc : $z(960) = 0$, soit :

$0 = -\dfrac{g}{v_0^2}\times 960^2 + 960 \Rightarrow \dfrac{g}{v_0^2}\times 960 = 1 \Rightarrow v_0 = \sqrt{960g}$ soit $\boldsymbol{v_0 = 97\ m.s^{-1}}$

B. Etude la vitesse du boulet dans l'eau

1. Bilan des forces

- Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho V\vec{g}$
- La force de frottement : $\vec{f} = -k\vec{v}$



2. Equation différentielle de la vitesse

Application de la seconde loi de Newton dans le référentiel galiléen (xOz), on obtient :

$\sum\vec{F} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\vec{a}$

Selon l'axe (Oz) : $m.g - \rho.V.g - k.v_z(t) = m\dfrac{dv_z}{dt}$

On obtient : $\dfrac{dv_z}{dt} = -\dfrac{k}{m}.v_z(t) + g(1 - \dfrac{\rho.V}{m})$ soit : $\boxed{\dfrac{dv_z}{dt} = A.v_z(t) + B}$

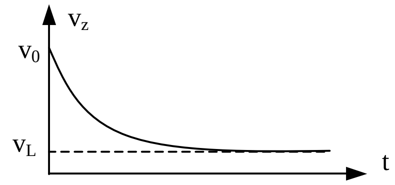
avec : $\boxed{A = -\dfrac{k}{\rho_a V}}$ et $\boxed{B = g(1 - \dfrac{\rho}{\rho_a})}$ puisque $m = \rho_a V$

3. Valeur des coefficients A et B : attention unités à convertir dans le système SI !

$A = -\dfrac{1{,}57}{9{,}00.10^3 \times 2{,}00.10^{-3}}$ = $\boldsymbol{-0{,}0872\ s^{-1}}$; $B = 9{,}81(1 - \dfrac{1{,}00}{9{,}00})$ = $\boldsymbol{8{,}72\ m.s^{-2}}$

4. Vitesse limite

Lorsque la vitesse limite est atteinte : $dv_z/dt = 0$, d'où : $v_L = -B/A$
On trouve : $\boldsymbol{v_L = 100\ m.s^{-1}}$.
Il y avait une erreur d'énoncé !! en fait, k = 15,7 SI
En réalité $v_L = 10\ m.s^{-1}$. Cette vitesse est inférieure à la vitesse initiale v_0. D'où la courbe de vitesse :



5. Courbe de vitesse →

Exercice 3 : Sonde Saturno-stationnaire /7,5 pts

1. Force gravitationnelle exercée par Saturne sur Cassini :

$$\boxed{\vec{F}_{S/C} = G \times \frac{M_S.M_C}{d^2}\overrightarrow{u_{CS}}}$$ avec :

G : constante de gravitation universelle ; M_S : masse de Saturne ; M_C : masse de Cassini ; d : distance séparant les centres de Saturne et Cassini ; $\overrightarrow{u_{CS}}$: vecteur unitaire dirigé de Cassini vers Saturne.

2. Accélération de Cassini

2[e] loi de Newton dans le référentiel galiléen Saturno-centrique (centré sur Saturne) :

$M_C\vec{a} = \vec{F}_{S/C}$ soit : $\boxed{\vec{a} = G \times \frac{M_S}{d^2}\overrightarrow{u_{CS}}}$ le vecteur accélération est donc dirigé vers Saturne.

3. Trajectoires possibles :

La trajectoire b n'est pas possible, car d'après la première loi de Kepler, les orbites sont des ellipses dont l'un des foyers est occupé par l'astre attracteur, ici Saturne. Dans la trajectoire b c'est le centre de l'ellipse et non l'un des foyers qui est occupé par Saturne.
La trajectoire c est un cas particulier de la trajectoire a. Les trajectoires a et c sont donc valides.

4. Vitesse

Pour la trajectoire c, la vitesse de la sonde est uniforme, car d'après la 2[e] loi de Kepler, Cassini balaie des aires égales pendant des durées égales. Or si la trajectoire est circulaire, des distances égales sont balayées pendant des durées égales, la vitesse est donc constante.

5. Trajectoire impossible

La trajectoire de la figure 2 est incompatible avec les lois de la mécanique car, pour une trajectoire circulaire uniforme, le vecteur accélération est centripète (dirigé vers le centre de la trajectoire). De plus il doit vérifier la relation établie précédemment à la question 2 et doit donc être dirigé vers le centre de Saturne. Ces 2 conditions sont incompatibles dans le cas de la trajectoire n°2.

6. Trajectoire Saturno-stationnaire

Pour être Saturno-stationnaire, la sonde Cassini doit être dans le plan de l'équateur et tourner dans le même sens que Saturne. C'est donc la **trajectoire n°1** qui est la bonne.

7. Altitude de la sonde

La période de révolution de la sonde Cassini doit être égale à la période de rotation de Saturne. Donc, en appliquant la 3[e] loi de Kepler à la sonde Cassini et à Titan, on obtient :

$$\frac{T_S^2}{(R_S+h)^3} = \frac{T_T^2}{R_T^3} \text{ soit : } h = \left(\frac{T_S^2.R_T^3}{T_T^2}\right)^{1/3} - R_S = R_T\left(\frac{T_S}{T_T}\right)^{2/3} - R_S$$

8. Valeur de h : $h = 1{,}22.10^6\left(\frac{639}{22968}\right)^{2/3} - 6{,}0.10^4$ d'où ***h = 52 000 km***

remarque : ici on pouvait exprimer les périodes et les distances dans l'unité voulue (ici min et km).