

**Exercice n° 1** (sur 4 points)

Déterminer chacune des limites suivantes :

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + 1}$                       b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{1 - x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

**Exercice n° 2** (sur 4 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 5}{x^2 + x - 2}$

On appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Justifier l'existence d'une asymptote verticale à  $\mathcal{C}$  dont on donnera l'équation.
2. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
 b. Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
 c. Étudier la position de  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$ .

**Exercice n° 3** (sur 4 points)

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$

1. a. Pourquoi  $g$  est-elle bien définie sur  $\mathbb{R}$  ?  
 b. Démontrer que pour tout  $x$  réel,  $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$   
 c.  $g$  a-t-elle une limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ?
2. Justifier alors précisément le calcul de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + \cos x}{2 - \cos x} \right)$

**Exercice n° 4** (sur 3 points)

Dans cet exercice, toute tentative de recherche pertinente même non aboutie sera évaluée.

Étudier  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} \right)$

**Exercice n° 5** (sur 5 points)

Remarque : les 2 questions sont indépendantes

1. a. Démontrer que pour tout  $z$  complexe,  $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$   
 b. Justifier que l'équation  $z^3 - 1 = 0$  a exactement trois solutions : une réelle et deux autres complexes non réelles conjuguées.  
 c. On appelle  $j$  la racine complexe de partie imaginaire positive  
 Après avoir donné la valeur de  $j^3$ , démontrer que  $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$

2.

Dans un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A d'affixe  $z_A = i$ , B d'affixe  $z_B = 2$  et C d'affixe  $z_C = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{1}{2} + \sqrt{3})$ .

- a. Soit  $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ . Donner  $Z$  sous forme algébrique.
- b. En calculant puis en interprétant géométriquement  $|Z|$  et  $\arg Z$ , déterminer la nature du triangle ABC.