CORRECTION DU DEVOIR N°3 : PREUVE D'UNE CONJECTURE ÉMISE À L'AIDE DE GÉOGEBRA

1. a. Un point est sur la courbe représentative d'une fonction f si son abscisse est dans l'ensemble de définition de f et si son ordonnée est l'image de son abscisse par f : par conséquent si t est l'abscisse du point M de $\mathcal{P}$ alors l'ordonnée de M est $f(t)$ soit $-\frac{t^2}{4}+1$

Donc M(t ; $-\frac{t^2}{4}+1$)

b. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est

$y = f'(a)(x-a)+f(a)$ ce qui donne pour le point d'abscisse t : $y = f'(t)(x-t)+f(t)$.

Comme $f(t) = -\frac{t^2}{4}+1$ alors $f'(t) = -\frac{t}{2}$ et l'équation de la tangente en M est donc $y = -\frac{t}{2}(x-t) - \frac{t^2}{4}+1$

ce qui donne en développant et simplifiant le résultat $y = -\frac{t}{2}x + \frac{t^2+4}{4}$ soit en multipliant les deux membres par 2 :

$2y = -tx + \frac{t^2+4}{2} = -tx + \frac{t^2}{2} + 2$

et en "faisant passer" les termes dans le membre de droite : $tx + 2y - \frac{t^2}{2} - 2 = 0$.

2. a. L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(b+\mathrm{B})\times h}{2}$ où b et B représentent les longueurs des côtés parallèles et h la hauteur du trapèze.

Vu la configuration de l'énoncé, l'aire de ABCD est donc $\frac{(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\times \mathrm{CD}}{2}$.

b. Comme D est la projection orthogonale de A (1 ; 0) sur la tangente $\mathcal{T}$ d'équation $tx + 2y - \frac{t^2}{2} - 2 = 0$, la formule donnée dans l'énoncé permet d'obtenir :

$$\mathrm{AD} = \frac{\left|t - \frac{t^2}{2} - 2\right|}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{\left|\frac{2t-t^2-4}{2}\right|}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{|2t-t^2-4|}{2\sqrt{t^2+4}} \text{ car } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

D'autre part : deux nombres opposés ont la même valeur absolue donc $|2t - t^2 - 4| = |t^2 - 2t + 4|$ et comme $t^2 - 2t + 4$ est un trinôme du 2e degré de discriminant (-12) strictement négatif, $t^2 - 2t + 4$ est du signe du coefficient de t^2 c'est à dire ici strictement positif pour toute valeur de t réelle. On a donc

$|t^2 - 2t + 4| = t^2 - 2t + 4$ et par conséquent $\mathrm{AD} = \frac{t^2-2t+4}{2\sqrt{t^2+4}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En raisonnant de même, on obtient $\mathrm{BC} = \frac{\left|-t - \frac{t^2}{2} - 2\right|}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{|t^2+2t+4|}{2\sqrt{t^2+4}} = \frac{t^2+2t+4}{2\sqrt{t^2+4}}$ car B(-1; 0), C projection orthogonale de B sur la tangente et pour tout t réel $t^2 + 2t + 4 > 0$ (même démonstration que précédemment)

3. a. On rappelle que pour une droite d'équation $ax + by + c = 0$ le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées ($-b$; a) est un vecteur directeur de la droite.

Ici, vu l'équation de $\mathcal{T}$, un vecteur directeur de cette tangente est le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (-2 ; t).

Si $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées ($\frac{-2}{\sqrt{t^2+4}}$; $\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}$) alors on remarque que $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\vec{v}$: donc $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et est donc aussi un vecteur directeur de $\mathcal{T}$.

Remarque : si l'équation d'une droite est de la forme $y = m\,x + p$ alors un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées (1, m). On peut donc aussi travailler avec la 1[ère] équation de $\mathcal{T}$ trouvée au **1.b.**

D'autre part puisque le repère est orthonormal, on a $(\|\vec{u}\|)^2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{t^2+4}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)^2 = \frac{4}{t^2+4} + \frac{t^2}{t^2+4} = \frac{4+t^2}{t^2+4} = 1$

Donc $\|\vec{u}\| = 1$ est $\vec{u}$ est aussi unitaire.

b. on sait que $\vec{w} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{w'} \cdot \vec{u}$ si $\overrightarrow{w'}$ est la projection orthogonale de $\vec{w}$ sur la direction de $\vec{u}$.

Comme A se projette orthogonalement en D et B en C sur $\mathcal{T}$, la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur la direction de $\vec{u}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{DC}$.

on a donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{DC} \cdot \vec{u}$ et comme les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, leur produit scalaire, compte tenu que $\|\vec{u}\| = 1$, est égal à $DC \times \|\vec{u}\| = DC$ (s'ils sont de même sens) ou à $-DC \times \|\vec{u}\| = -DC$ (s'ils sont de sens contraire).

Dans tous les cas on a donc bien $|\overrightarrow{DC} \cdot \vec{u}| = DC$

4. Compte tenu des résultats démontrés dans les questions précédentes, on obtient

$$(AD + BC) = \frac{t^2 - 2\,t + 4}{2\sqrt{t^2+4}} + \frac{t^2 + 2\,t + 4}{2\sqrt{t^2+4}} = \frac{2t^2 + 8}{2\sqrt{t^2+4}} = \frac{t^2+4}{\sqrt{t^2+4}}$$

Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de deux vecteurs est égal à la somme du produit des abscisses et du produit des ordonnées. On a donc, puisque $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;0)$ et $\vec{u}\,\left(\frac{-2}{\sqrt{t^2+4}}\,;\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)$:

$$DC = |\overrightarrow{DC} \cdot \vec{u}| = |\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}| = \frac{4}{\sqrt{t^2+4}}.$$

Par conséquent $(AD + BC) \times CD = \frac{t^2+4}{\sqrt{t^2+4}} \times \frac{4}{\sqrt{t^2+4}} = 4.$

L'aire de ABCD est donc quelle que soit la valeur de t donc quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{P}$

$$\frac{(AD + BC) \times CD}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

La conjecture émise, à savoir que quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{P}$ l'aire du trapèze ABCD est constante et égale à 2, vient donc d'être prouvée.