

CORRECTION DU DEVOIR N°3 : PREUVE D'UNE CONJECTURE ÉMISE À L'AIDE DE GÉOGBRA

1. a. Un point est sur la courbe représentative d'une fonction f si son abscisse est dans l'ensemble de définition de f et si son ordonnée est l'image de son abscisse par f : par conséquent si t est l'abscisse du point M de \mathcal{P} alors l'ordonnée de M est $f(t)$ soit $-\frac{t^2}{4} + 1$

Donc $M(t; -\frac{t^2}{4} + 1)$

b. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \text{ ce qui donne pour le point d'abscisse } t : y = f'(t)(x - t) + f(t).$$

Comme $f(t) = -\frac{t^2}{4} + 1$ alors $f'(t) = -\frac{t}{2}$ et l'équation de la tangente en M est donc $y = -\frac{t}{2}(x - t) - \frac{t^2}{4} + 1$

ce qui donne en développant et simplifiant le résultat $y = -\frac{t}{2}x + \frac{t^2 + 4}{4}$ soit en multipliant les deux membres par 2 :

$$2y = -tx + \frac{t^2 + 4}{2} = -tx + \frac{t^2}{2} + 2$$

et en "faisant passer" les termes dans le membre de droite : $tx + 2y - \frac{t^2}{2} - 2 = 0$.

2. a. L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(b + B) \times h}{2}$ où b et B représentent les longueurs des côtés parallèles et h la hauteur du trapèze.

Vu la configuration de l'énoncé, l'aire de ABCD est donc $\frac{(AD + BC) \times CD}{2}$.

b. Comme D est la projection orthogonale de A (1 ; 0) sur la tangente \mathcal{T} d'équation $tx + 2y - \frac{t^2}{2} - 2 = 0$, la formule donnée dans l'énoncé permet d'obtenir :

$$AD = \frac{|t - \frac{t^2}{2} - 2|}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{|\frac{2t - t^2 - 4}{2}|}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{|2t - t^2 - 4|}{2\sqrt{t^2 + 4}} \text{ car } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

D'autre part : deux nombres opposés ont la même valeur absolue donc $|2t - t^2 - 4| = |t^2 - 2t + 4|$ et comme $t^2 - 2t + 4$ est un trinôme du 2^e degré de discriminant (-12) strictement négatif, $t^2 - 2t + 4$ est du signe du coefficient de t^2 c'est à dire ici strictement positif pour toute valeur de t réelle. On a donc

$$|t^2 - 2t + 4| = t^2 - 2t + 4 \text{ et par conséquent } AD = \frac{t^2 - 2t + 4}{2\sqrt{t^2 + 4}} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En raisonnant de même, on obtient $BC = \frac{|-t - \frac{t^2}{2} - 2|}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{|t^2 + 2t + 4|}{2\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{t^2 + 2t + 4}{2\sqrt{t^2 + 4}}$ car B(-1 ; 0), C projection orthogonale de B sur la tangente et pour tout t réel $t^2 + 2t + 4 > 0$ (même démonstration que précédemment)

3. a. On rappelle que pour une droite d'équation $ax + by + c = 0$ le vecteur \vec{v} de coordonnées $(-b ; a)$ est un vecteur directeur de la droite.

Ici, vu l'équation de \mathcal{T} , un vecteur directeur de cette tangente est le vecteur \vec{v} de coordonnées $(-2 ; t)$.

Si \vec{u} est le vecteur de coordonnées $(\frac{-2}{\sqrt{t^2 + 4}} ; \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}})$ alors on remarque que $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} \vec{v}$: donc \vec{u} est colinéaire

à \vec{v} et est donc aussi un vecteur directeur de \mathcal{T} .

D'autre part puisque le repère est orthonormal, on a $(\|\vec{u}\|)^2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{t^2+4}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)^2 = \frac{4}{t^2+4} + \frac{t^2}{t^2+4} = \frac{4+t^2}{t^2+4} = 1$

Donc $\|\vec{u}\| = 1$ et \vec{u} est aussi unitaire.

b. on sait que $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w}' \cdot \vec{u}$ si \vec{w}' est la projection orthogonale de \vec{w} sur la direction de \vec{u} .

Comme A se projette orthogonalement en D et B en C sur \mathcal{T} , la projection orthogonale de AB sur la direction de \vec{u} est donc le vecteur DC.

on a donc $\vec{AB} \cdot \vec{u} = \vec{DC} \cdot \vec{u}$ et comme les vecteurs DC et \vec{u} sont colinéaires, leur produit scalaire, compte tenu que $\|\vec{u}\| = 1$, est égal à $\vec{DC} \times \|\vec{u}\| = \vec{DC}$ (s'ils sont de même sens) ou à $-\vec{DC} \times \|\vec{u}\| = -\vec{DC}$ (s'ils sont de sens contraire).

Dans tous les cas on a donc bien $|\vec{DC} \cdot \vec{u}| = \vec{DC}$

4. Compte tenu des résultats démontrés dans les questions précédentes, on obtient

$$(\vec{AD} + \vec{BC}) = \frac{t^2 - 2t + 4}{2\sqrt{t^2+4}} + \frac{t^2 + 2t + 4}{2\sqrt{t^2+4}} = \frac{2t^2 + 8}{2\sqrt{t^2+4}} = \frac{t^2 + 4}{\sqrt{t^2+4}}$$

Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de deux vecteurs est égal à la somme du produit des abscisses et du produit des ordonnées. On a donc, puisque $\vec{AB} = (-2; 0)$ et $\vec{u} = \left(\frac{-2}{\sqrt{t^2+4}}; \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)$:

$$|\vec{DC} \cdot \vec{u}| = |\vec{AB} \cdot \vec{u}| = \frac{4}{\sqrt{t^2+4}}$$

$$\text{Par conséquent } (\vec{AD} + \vec{BC}) \times \vec{CD} = \frac{t^2 + 4}{\sqrt{t^2+4}} \times \frac{4}{\sqrt{t^2+4}} = 4.$$

L'aire de ABCD est donc quelle que soit la valeur de t donc quelle que soit la position du point M sur \mathcal{P}

$$\frac{(\vec{AD} + \vec{BC}) \times \vec{CD}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

La conjecture émise, à savoir que quelle que soit la position du point M sur \mathcal{P} l'aire du trapèze ABCD est constante et égale à 2, vient donc d'être prouvée.