

CORRECTION DE L'EXERCICE N° 40 P 47

Soit $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ définie pour $x \neq 0$

1. On a :

$$x \mapsto 3x = X \mapsto \sin X$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x = \lim_{X \rightarrow 0} \sin X = 0$

Le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ ont pour limite 0 quand x tend vers 0 : on a donc une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ "

2. En posant $X = 3x$ alors $x = \frac{X}{3}$ et par conséquent $\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin X}{\frac{X}{3}} = 3 \frac{\sin X}{X}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \left(3 \frac{\sin X}{X} \right)$

Mais $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = \cos 0 = 1$ (limite du taux d'accroissement de sin entre X et 0
= nombre dérivé de sin en 0 ; revu en cours)

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \times \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 3$

On peut conclure $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

3. Puisque $\sin 0 = 0$, on remarque que $f(x) = \frac{\sin 3x - \sin (3 \times 0)}{x - 0}$: taux d'accroissement

de la fonction $x \mapsto \sin 3x$ entre x et 0 donc la limite de ce taux d'accroissement lorsque x vers 0 est le nombre dérivée de cette fonction en 0:

Or, résultat vu en 1^{ère}, la dérivée de $g : x \mapsto \sin 3x$ est $g' : x \mapsto 3 \cos 3x$
et $g'(0) = 3 \cos 0 = 3$.

On retrouve donc le résultat précédent à savoir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

La représentation graphique de la fonction f permet soit de conjecturer le résultat (si on la construit avant de commencer l'exercice) soit de le confirmer (si le tracé est fait en fin d'exercice).