<u>Exercice n° 1</u> *(sur 4 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (1 + x)$

1. **a.** Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

   b. En déduire que pour tout x réel, $e^x \geqslant (1 + x)$

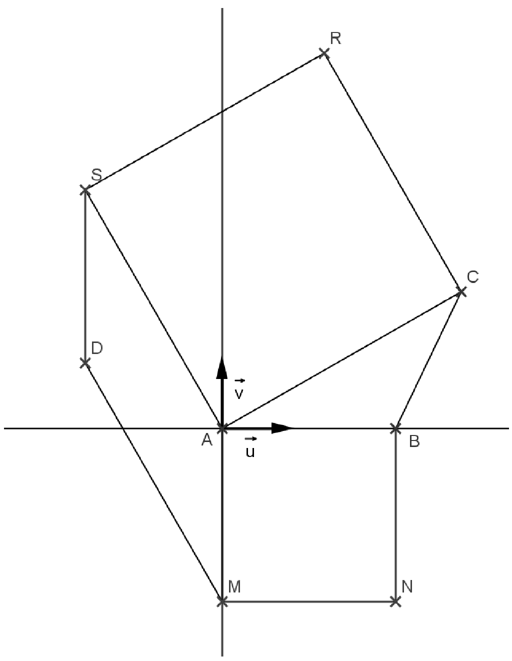
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

<u>Exercice n° 2</u> *(sur 4 points)*

On considère un triangle ABC telle que la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit dans $]0\ ;\pi[$
ACRS et BAMN sont des carrés, MASD est un parallélogramme (voir figure ci-dessous)
L'objectif de l'exercice est de prouver que *<u>(AD) est une hauteur du triangle ABC</u>* et que *<u>AD = BC</u>*
Pour cela on se propose de travailler avec les nombres complexes.

On considère donc un repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est unitaire, colinéaire à et de même sens que $\overrightarrow{AB}$
On appelle b et c les affixes de B et C.

1. En justifiant, déterminer les affixes s, m et d des points S, M et D en fonction de b et c
2. Calculer les affixes de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$
3. Prouver alors que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux
4. Justifier les deux affirmations soulignées dans l'énoncé



TOURNEZ LA PAGE

Exercice n° 3 (*sur4 points)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A d'affixe $2i$ et B d'affixe -1.

À tout point M d'affixe z, $z \neq 2i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z+1}{z-2i}$

1. Donner, sous forme algébrique, les affixes des points C' et D' associés respectivement aux points C d'affixe i et D d'affixe 4.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$
3. **a.** Donner une interprétation géométrique de l'argument de z' lorsque $z \neq -1$
   b. Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel strictement négatif
   c. Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre imaginaire pur non nul

(D'après documents Ministère de l'Éducation Nationale)

Exercice n° 4 (*sur 4 points)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. R est la transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = -iz + 4i$
   a. Démontrer qu'il existe un seul point Ω d'affixe ω invariant par R c'est à dire tel que $R(\Omega) = \Omega$
   b. Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$
2. **a.** Donner l'écriture complexe de la translation T de vecteur $2\vec{u}$
   b. *Dans cette question, toute tentative de recherche appropriée même non aboutie sera évaluée*
   Soit M d'affixe z. On appelle M' d'affixe z' son image par la transformation $R \circ T$: on a donc $M' = R[T(M)]$
   Exprimer z' en fonction de z. En déduire la nature de $R \circ T$.

(D'après documents Ministère de l'Éducation Nationale)

Exercice n° 5 *(sur 4 points)*

Soient p et q deux nombres réels quelconques

1. Démontrer que $e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}\right)$
2. Donner les parties réelles et imaginaires du 1^er^ membre de l'égalité précédente.
Même question pour le 2^e^ membre

3. En déduire une écriture de $\cos p + \cos q$, puis de $\sin p + \sin q$ sous la forme d'un produit.
4. *Applications*:
   a. Donner la valeur exacte de : $\cos\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{5\pi}{12}$
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x + \cos(3x) = 0$