

CORRECTION DE L'EXERCICE N° 60 P 427

1. a) La droite passant par A et B est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB} (2; 3; 2)$ passant par A. Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = 3t \\ z = 2t + 8 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- b) Un vecteur directeur de \mathcal{D} est $\vec{u} (3; 2; -2)$

Les vecteurs \vec{u} et \overrightarrow{AB} ne sont pas colinéaires puisque leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles (en effet $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$) : les droites Δ et \mathcal{D} ne sont donc pas parallèles.

Pour prouver qu'elles ne sont pas coplanaires, il suffit donc de prouver qu'elles ne sont pas sécantes c'est à dire qu'elles n'ont pas de point commun.

Supposons qu'il existe un tel point commun M : cela signifierait qu'il existe un paramètre t réel et un paramètre s réel tels que les coordonnées $(x; y; z)$ de M vérifient les représentations paramétriques de Δ et \mathcal{D} .

Autrement dit tels que
$$\begin{cases} x = 3s - 5 = 2t + 8 & (1) \\ y = 2s + 1 = 3t & (2) \\ z = -2s = 2t + 8 & (3) \end{cases}$$

En remplaçant, d'après l'équation (1), $2t + 8$ par $3s - 5$ dans l'équation (3) on obtient $s = 1$ soit $t = -5$. Mais pour ces valeurs de s et t , l'équation (2) n'est pas vérifiée : par conséquent le système précédent n'a pas de solutions ce qui signifie que les droites Δ et \mathcal{D} n'ont aucun point commun.

L'étude ci-dessus prouve donc que les droites Δ et \mathcal{D} ne sont pas coplanaires.

2. a) $\vec{n} (2; -2; 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{P} **signifie, puisque les droites Δ et \mathcal{D} ne sont pas parallèles**, que :
 \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux puisque \mathcal{P} et \mathcal{D} sont parallèles et \vec{n} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux car Δ est contenue dans \mathcal{P}
Or $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 3 - 2 \times 2 + 1 \times (-2) = 0$: donc $\vec{n} \perp \vec{u}$

De même, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 2 = 0$: donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

\vec{n} est donc bien un vecteur normal à \mathcal{P} .

Une équation cartésienne de \mathcal{P} est donc du type : $2x - 2y + z + d = 0$.

Or $A \in \mathcal{P}$ donc les coordonnées de A doivent vérifier cette équation ce qui donne :
 $16 + 8 + d = 0$ soit $d = -24$

Une équation cartésienne de \mathcal{D} est donc : $2x - 2y + z - 24 = 0$

- b) On sait que la distance d'un point $M(x_0; y_0; z_0)$ à un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :
- $$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Si on prend un point M sur \mathcal{D} alors ses coordonnées sont du type $(3s - 5; 2s + 1; -2s)$ et vu l'équation de \mathcal{P} trouvée précédemment, la distance d'un tel point à \mathcal{P} est donnée par :

$$\frac{|2(3s - 5) - 2(2s + 1) - 2s - 24|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{36}{3} = 12$$

Cette distance est constante quel que soit le point M de \mathcal{D} : la distance d'un point M de \mathcal{D} au plan \mathcal{P} est donc bien indépendante de M .

- c) Le plan (xOy) a comme vecteur normal le vecteur $\vec{k}(0; 0; 1)$ et a pour équation cartésienne $z = 0$.
 les vecteurs normaux de \mathcal{P} , $\vec{n}(2; -2; 1)$, et de (xOy) , $\vec{k}(0; 0; 1)$, sont donc non colinéaires ce qui signifie que ces deux plans sont sécants.

La droite intersection de \mathcal{P} et du plan (xOy) correspond donc au système $\begin{cases} 2x - 2y + z - 24 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ soit à

$$\begin{cases} x = y + 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

Cela peut se traduire par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t + 12 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Si \mathcal{S} est tangente en C à \mathcal{P} alors le centre Ω de \mathcal{S} est tel que (ΩC) perpendiculaire à \mathcal{P} c'est à dire ΩC colinéaire à \vec{n} , autrement dit \vec{n} est un vecteur directeur de (ΩC)

Une représentation paramétrique de (ΩC) est donc $\begin{cases} x = 2t + 10 \\ y = -2t + 1 \\ z = t + 6 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

D'autre part la distance de Ω au plan \mathcal{P} , ici 6, est la distance ΩC qui est donc aussi le rayon de \mathcal{S} .

Les coordonnées de Ω sont du type $(2t + 10; -2t + 1; t + 6)$ avec t réel ; on a alors $C\Omega(2t; -2t; t)$
 On a donc $\Omega C^2 = 36 = 4t^2 + 4t^2 + t^2 = 9t^2$ d'où $t^2 = 4$ et $t = 2$ ou $t = -2$
 Pour avoir les coordonnées de Ω , il faut donc choisir entre deux valeurs de t .

Petit complément de cours :

Dans l'espace un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ partage les points de l'espace en trois parties :

Les points du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by + cz + d = 0$

Les points du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by + cz + d > 0$ (demi-espace des points "au-dessus" du plan)

Les points du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by + cz + d < 0$ (demi-espace des points au-dessous du plan)

Ici les coordonnées du point O vérifient $2 \times 0 - 2 \times 0 + 0 - 24 < 0$

puisque d'après l'énoncé le point Ω est du même côté du plan que O , Ω doit avoir des coordonnées vérifiant la même inégalité.

or pour $t = 2$ on obtient les coordonnées $(14; -3; 8)$ qui vérifient $2 \times 14 - 2 \times (-3) + 8 - 24 > 0$

et pour $t = -2$ on obtient les coordonnées $(6; 5; 4)$ qui vérifient $2 \times 6 - 2 \times 5 + 4 - 24 < 0$

Ω correspondant donc au paramètre -2 donc $\Omega(6; 5; 4)$ et une équation cartésienne de \mathcal{S} , sphère de centre Ω et de rayon 6, est donc donnée par la traduction sur les coordonnées de $\Omega M^2 = 6^2$ soit $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 + (z - 4)^2 = 36$