

Éléments de correction devoir nombres complexes et géométrie

Exercice n° 1

1. a. $f'(x) = e^x - 1$. f est décroissante sur \mathbb{R}_- et f croissante sur \mathbb{R}_+

En $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -(1+x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

en $+\infty$ $f(x) = x(\frac{e^x}{x} - 1) - 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{e^x}{x} - 1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{e^x}{x} - 1) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- b. le tableau de variations est le suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe f'		-	0
f	$+\infty$		0
			$+\infty$

2. On a donc pour tout x réel $f(x) \geq 0$ donc $e^x \geq (1+x)$

Étudions sur \mathbb{R} les variations de la fonction $g : x \mapsto e^x - (1+x + \frac{x^2}{2})$

$g'(x) = e^x - (1+x) \geq 0$ d'après 1.

De plus $g(0) = 1 - 1 = 0$

le tableau de variations de g est le suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe g'		+	0
g			0
			$+\infty$

On en déduit que pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$ donc $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Exercice n° 2

1. Puisque ACRS est un carré dans la position de la figure, S est l'image de C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Comme A a pour affixe 0, on a

$$s = e^{i\frac{\pi}{2}} c \text{ soit } s = i c$$

De même M est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$m = -i b$$

Enfin puisque AMDS est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AS}$ donc $d = m + s = i(c - b)$

2. BC a pour affixe $c - b$ et AD a pour affixe d soit $i(c - b)$

3. On sait que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = \arg\left(\frac{i(c-b)}{c-b}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π)

Par conséquent \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AD} sont bien orthogonaux

4. La question précédente prouve que les droites (BC) et (AD) sont perpendiculaires : (AD) est donc perpendiculaire au côté [BC] et passe par le sommet A de ABC : c'est donc une hauteur de ABC

De plus puisque $\frac{AD}{BC} = \frac{|i(c-b)|}{|c-b|} = |i| = 1$.

Donc AD = BC

Exercice n° 3

1. En appelant c' et d' les affixes de C' et D' , on obtient $c' = \frac{i+1}{-i} = i-1$ et $d' = 1 + \frac{1}{2}i$

2. $|z'| = 1$ équivaut à $\left| \frac{z+1}{z-2i} \right| = 1$ soit, puisque $z \neq 2i$, à $|z+1| = |z-2i|$.

Or $|z+1| = AM$ et $|z-2i| = BM$

$|z'| = 1$ équivaut donc à $AM = BM$: l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est donc la médiatrice de $[AB]$

3. a. $\arg(z') = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$

b. z' est un nombre réel strictement négatif équivaut à $\arg(z') = \pi$ (modulo 2π)

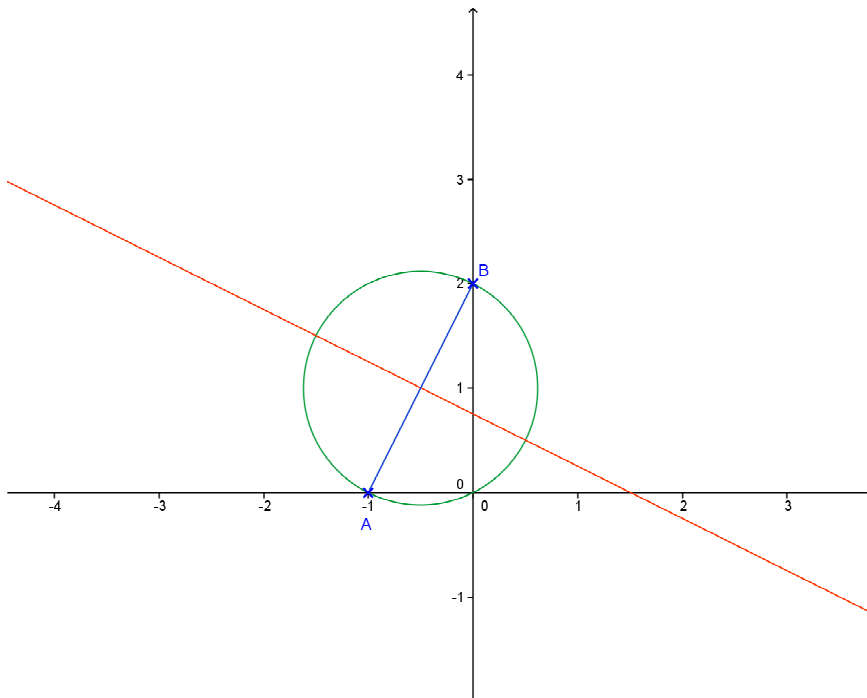
Les points M cherchés sont donc tels que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi$: c'est donc le segment $[AB]$ privé des points A et B puisque z est différent de $-i$ et de $2i$

c. z' est un nombre imaginaire pur non nul équivaut à $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ ou $\arg(z') = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π)

ou encore à $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ (modulo π) ce qui donne :

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}$ (modulo π)

L'ensemble des points cherchés est le cercle de diamètre $[AB]$ privé comme précédemment des points A et B



Exercice n° 4

1. a. Un point invariant par R à une affixe ω vérifiant $\omega = -i\omega + 4i$

Vérifiez que cette équation a une unique solution $\omega = 2(1+i)$ ce qui répond à la question

- b. On a alors : $z' - 2(1+i) = -iz + 4i - 2(1+i) = -iz + 2i - 2 = -i(z - 2 - 2i) = -i(z - 2(1+i))$
L'écriture complexe de R est donc :

$$z' - \omega = -i(z - \omega) \text{ qui est l'écriture complexe de la rotation de centre } \Omega \text{ d'affixe } \omega \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2} \text{ puisque}$$
$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

2. a. l'écriture complexe de la translation T de vecteur $2u$ est $Z' = Z + 2$ puisque l'affixe de $2u$ est 2
b.

On peut représenter la transformation comme étant la transformation donnée par

$$M \mapsto M_1 \mapsto M'$$
$$z \mapsto z_1 = z + 2 \mapsto z'$$

M' étant l'image de M_1 par R , on a donc, en tenant compte de l'expression donnée dans l'énoncé,

$$z' = -iz_1 + 4i = -i(z + 2) + 4i$$

L'écriture complexe de $R \circ T$ est donc

$$z' = -iz + 2i$$

Cette écriture ressemble à celle de R donnée dans l'énoncé ce qui laisse supposer que T est sans doute une rotation.

En raisonnant comme à la 1^{ère} question, prouvez qu'on trouve un seul point invariant par T d'affixe $\omega' = 1 + i$

On vérifie ensuite comme précédemment que $z' - \omega' = -i(z - \omega')$ ce qui prouve que T est la rotation de centre le point d'affixe $1 + i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Exercice n° 5

1. Développons le 2^e membre. Il vient :

$$e^{i \frac{p+q}{2}} \left(e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{q-p}{2}} \right) = e^{i \frac{p+q}{2}} e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{p+q}{2}} e^{i \frac{q-p}{2}}$$

En tenant compte que $e^a e^b = e^{a+b}$, on obtient

$$e^{i \frac{p+q}{2}} e^{i \frac{p-q}{2}} = e^{ip} \text{ car } i \frac{p+q}{2} + i \frac{p-q}{2} = i \frac{2p}{2} = ip$$

et

$$e^{i \frac{p+q}{2}} e^{i \frac{q-p}{2}} = e^{iq}$$

$$\text{On a donc bien pour tous } p \text{ et } q \text{ réels : } e^{ip} + e^{iq} = e^{i \frac{p+q}{2}} \left(e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{q-p}{2}} \right)$$

2. Pour le 1^{er} membre

$$\begin{aligned} \text{On a : } e^{ip} + e^{iq} &= \cos p + i \sin p + \cos q + i \sin q \\ &= \cos p + \cos q + i (\sin p + \sin q) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = \cos p + \cos q \text{ et } \operatorname{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = \sin p + \sin q$$

Pour le 2^e membre

$$\text{On a } e^{i \frac{p+q}{2}} = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + i \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Et

$$\left(e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{q-p}{2}} \right) = \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) + \cos\left(\frac{q-p}{2}\right) + i \sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$$

$$\text{Mais la fonction sinus étant impaire : } \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = -\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$$

$$\text{et la fonction cosinus étant paire : } \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos\left(\frac{q-p}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \left(e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{q-p}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned} e^{i \frac{p+q}{2}} \left(e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{q-p}{2}} \right) &= \left[\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + i \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \right] \times \left[2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \right] \\ &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + 2 i \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\operatorname{Re}\left(e^{i \frac{p+q}{2}} \left(e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{q-p}{2}} \right) \right) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

et

$$\operatorname{Im}\left(e^{i \frac{p+q}{2}} \left(e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{q-p}{2}} \right) \right) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

3. En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres, on obtient immédiatement pour tous réels p et q :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

4. a.

D'après ce qui précède, en posant $p = \frac{\pi}{12}$ et $q = \frac{5\pi}{12}$ on a $\frac{p+q}{2} = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{p-q}{2} = -\frac{\pi}{6}$

On alors

$$\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

b. L'équation $\cos x + \cos (3x) = 0$ équivaut à $2 \cos 2x \cos x = 0$ c'est à dire à

$$\cos x = 0 \quad (1) \text{ ou } \cos 2x = 0 \quad (2)$$

(1) donne $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k est un entier relatif quelconque

(2) donne $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ où k est un entier relatif quelconque

L'équation a une infinité de solutions : ce sont les réels de la forme

$$\frac{\pi}{2} + k\pi; \quad \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \text{ entier relatif quelconque.}$$

Toutes ces solutions sont représentées sur le cercle trigonométrique par 6 points, respectivement J et J', M1 et M'1, M2 et M'2 (voir figure ci-dessous).

