TES *(obligatoire et spécialité)*

CORRECTION DU BAC BLANC 2009

Exercice n° 1

1. f ' (3) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point A. Or cette tangente est (AE) dont le coefficient directeur vaut $\frac{y_A - y_E}{x_A - x_E}$ c'est à dire $\frac{2}{3}$

2. Les solutions de l'inéquation f $(x) \geqslant 0$ correspondent graphiquement aux abscisses des points de la courbe situés au-dessus de l'axe des abscisses : l'ensemble solution est donc [2 ; 6]

3. Puisque g(x) = ln [f(x)], g est définie pour les valeurs de x telles que f(x) > 0 soit d'après **2.** sur I =] 2 ; 6].

4. g(5) = ln [f(5)] = ln (2) ≈ 0,693

5. g(x) = 0 équivaut à ln [f(x)] = 0 c'est à dire à $x \in$ I et f(x) = 1. Graphiquement et compte tenu de I, on obtient une seule solution 3.
Par conséquent, l'équation g(x) = 0 a, sur I, une unique solution 3.

6. La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, g a donc le même sens de variation que celui de f sur I : d'après l'énoncé, f est strictement croissante sur I donc g est strictement croissante sur I .

7. g = ln $\circ$ f, donc g ' = $\frac{f'}{f}$. On a donc g ' (3) = $\frac{f'(3)}{f(3)}$. Comme f ' (3) = $\frac{2}{3}$ d'après **1.** et f(3) = 1, on obtient g ' (3) = $\frac{2}{3}$.

8. On a $\lim_{x \to 2} f(x) = 0^+$. Donc $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$
On en déduit que la courbe C_g admet la droite d'équation x = 2 comme asymptote.

Exercice n° 2 *(obligatoire)*

1. : 1

Quand x tend vers 0, l'expression f(x) - 1 est comprise entre deux fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x$ qui ont pour limite 0 ; par conséquent on a $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) - 1) = 0$ soit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

2. : $-\dfrac{1}{25}(1 - 5x)^5$

Rappel : la dérivée de $(ax + b)^n$ est $a\,n\,(ax + b)^{n-1}$. On vérifie alors que la dérivée de l'expression ci-dessus est bien $(1 - 5x)^4$

3. : $-\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$

Donc la limite cherchée est celle de ln X lorsque X tend vers 0^+ c'est à dire $-\infty$

4. : n'a pas de solution

l'expression écrite n'a de sens que si $-3x + 1 > 0$ et $x - 1 > 0$ soit $x < \dfrac{1}{3}$ et $x > 1$. Aucune valeur de x ne vérifie ces deux conditions, d'où le résultat.

5. : correspond à une loi de probabilité d'espérance 2,5 et de variance 1,25

On a bien une loi de probabilité puisque la somme des valeurs sur la 2e ligne est 1. Il suffit alors de faire les calculs de l'espérance et de la variance.

<u>Exercice nº 2</u> (*spécialité)*

1.a. Un graphe est complet si tous les sommets sont adjacents : or, ici, les sommets 1 et 6 par exemple ne sont pas adjacents. Ce graphe n'est donc pas complet

b. Un graphe est connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques du graphe, ce qui est le cas ici. Ce graphe est donc connexe.

2. a. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité

numéro du sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
degré	4	4	4	6	4	3	4	3

b. On sait que la somme des degrés est égal au double du nombre d'arêtes donc ici puisque $5 \times 4 + 6 + 2 \times 3 = 32$, on en déduit que le nombre d'arêtes de ce graphe est 16.

3. a. La matrice M correspondant au graphe est la suivante ; on s'assure qu'elle est symétrique par rapport à la 1^{ère} diagonale, le graphe n'étant pas orienté.

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

b. Le nombre de chemins de longueur 3 allant du secteur 2 au secteur 5 est donné par l'élément situé à la 2^e ligne, 5^e colonne de la matrice M^3

Grâce à la calculatrice, on trouve qu'il y a 7 chemins répondant à la question.

4. a. Pouvoir parcourir la grande surface en passant une fois et une seule par chaque arête, c'est pouvoir trouver une chaîne eulérienne dans ce graphe. Puisque le graphe est connexe, on peut appliquer le théorème d'Euler : une telle chaîne existe si, et seulement si, il existe 0 ou 2 sommets de degré impair.
D'après la question **2.a.** il existe uniquement deux sommets de degré impair : les sommets 6 et 8. Par conséquent, il existe au moins une chaîne eulérienne rejoignant le sommet 6 au sommet 8. Le désir du client peut donc être réalisé.

b. l'algorithme d'Euler permet de déterminer une telle chaîne : on écrit une chaîne, sans répétition d'arêtes, quelconque ente le sommets 6 et 8 puis on intègre des cycles.
Par exemple :

6-2-1-3-4-5-8
6-4-7-6-2-1-3-4-5-8

6-4-7-6-2-1-3-4-5-8-4-1-5-3-2-7-8

La chaîne 6-4-7-6-2-1-3-4-5-8-4-1-5-3-2-7-8 est bien une chaîne eulérienne et répond donc à la question.

5. Le désir du directeur revient à chercher le nombre chromatique du graphe.
a. On sait que le nombre chromatique est supérieur ou égal à l'ordre du plus maximum d'un sous graphe complet.
Dans ce graphe, on trouve un sous-graphe complet d'ordre 4 formé des sommets 1,3,4 et 5. Un sous-graphe complet d'ordre 5 devrait être constitué de 5 des 6 sommets ayant un degré supérieur ou égal à 4, c'est à dire 1,2,3,4,5 ou 7 . On observe qu'un tel sous-graphe n'existe pas.

Le nombre chromatique est donc supérieur ou égal à 4 : on a $n \geqslant 4$

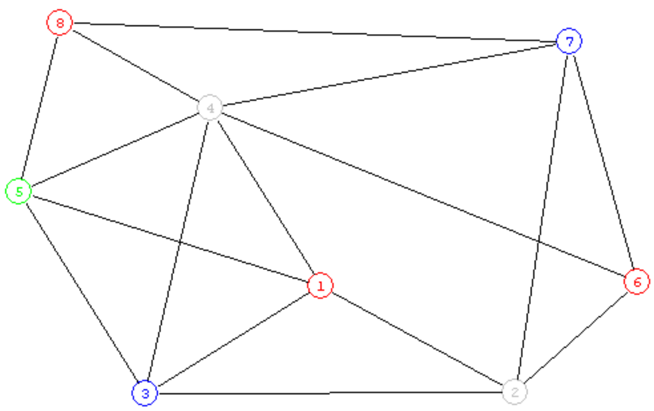
b. On sait que le nombre chromatique est inférieur ou égal au plus grand des degrés plus 1

Comme ici le degré maximal des sommets Ets 6, on a bien $n \leqslant 7$

c. On classe les sommets dans l'ordre décroissant des degrés. On colorie avec une 1ère couleur le plus grand nombre de sommets non adjacents. On recommence ensuite avec une autre couleur en commençant par le 1er sommet non colorié, etc..

Une coloration possible est donnée par

numéro du sommet	4	1	2	3	5	7	6	8
degré	6	4	4	4	4	4	3	3
couleur	gris	rouge	gris	bleu	vert	bleu	rouge	rouge



On peut donc colorier le graphe avec 4 couleurs : comme le nombre chromatique est supérieur ou égal à 4, on peut affirmer que $n = 4$ et que le directeur aura besoin de 4 couleurs minimum pour mener à bien son projet.

Exercice n° 3

Partie A

1. a. $P_M(E)$ correspond à la probabilité pour que Pierre réponde correctement à une question musique qui d'après l'énoncé vaut $\frac{3}{4}$. On a donc $P_M(E) = \frac{3}{4}$

b. L'événement proposé est $M \cap E$ et on a $P(M \cap E) = P(M) \times P_M(E)$

Or $P(M) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

D'où $P(M \cap E) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

2. D'après la formule des probabilités totales, on a $P(E) = P(M \cap E) + P(C \cap E)$

Or $P(C \cap E) = P(C) \times P_C(E) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

On a donc $P(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

3. On a à chercher ici $P_{\overline{E}}(C) = \dfrac{P(C \cap \overline{E})}{P(\overline{E})}$

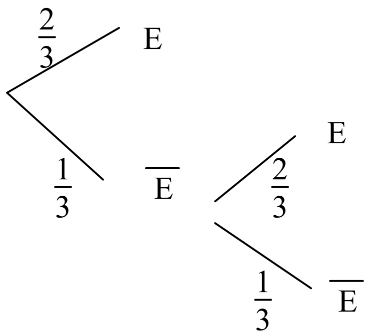
Or $P(\overline{E}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

et $P(C \cap \overline{E}) = P(C) \times P_C(\overline{E}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ d'après les données de l'énoncé

Donc $P_{\overline{E}}(C) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

Partie B

1. La situation décrite peut être représentée par l'arbre pondéré ci-dessous



.

2. Pierre peut marquer 0 point (événement $\overline{E} \cap \overline{E}$) ; 2 points (pour $\overline{E} \cap E$) ou 5 points pour E à la 1ère fois. La loi de probabilité est donnée par le tableau :

points	0	2	5
probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$

L'espérance est alors $0 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{2}{3} = \frac{24}{9} \approx 3{,}77$

Cela signifie qu'en moyenne lors de ce jeu , Pierre marquera $\frac{24}{9}$ points soit environ 3,77 points.

Exercice nº 4

Partie A

1. On calcule la dérivée de $x \longmapsto \frac{x^2}{2}$ qui est $x \longmapsto x$

celle de $x \longmapsto \frac{9x}{x+1}$ qui est de la forme $\frac{u}{v}$ dont la dérivée est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ et on obtient pour dérivée $x \longmapsto \frac{9}{(x+1)^2}$

et enfin celle de $x \longmapsto \ln(x+1)$ de la forme $\ln u$ dont la dérivée est $\frac{u'}{u}$ ce qui donne $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$

On obtient donc $f'(x) = x + \frac{9}{(x+1)^2} - \frac{9}{x+1} = \frac{x(x+1)^2 + 9 - 9(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{(x+1)^2}$

Or en développant l'expression $x(x-2)(x+4)$ on retrouve $x^3 + 2x^2 - 8x$
Par conséquent on a bien $f'(x) = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$

2. Sur l'intervalle $[0 ; 5]$, on a $x \geqslant 0$, $x + 4 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$. Par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		2		α		5
f'		$-$			$+$		
$f(x)$	0	↘	$8 - 9\ln 3$	↗	0	↗	$f(5)$

3. Sur l'intervalle [2 ; 5], f est une fonction continue comme somme et composée de fonctions continues et, d'après **2.**, elle est strictement croissante. On peut lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, à savoir que f prend une fois et seule toute valeur comprise entre f(2) et f(5).
Or $f(2) \approx -1{,}888 < 0$ et $f(5) \approx 3{,}874 > 0$.

Comme $f(2) < 0 < f(5)$, il existe une seule valeur α telle que $2 < \alpha < 5$ vérifiant $f(\alpha) = 0$. Autrement dit l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur [2 ; 5]
À l'aide de la calculatrice on obtient $3{,}6990 < \alpha < 3{,}6991$ ce qui donne pour α la valeur arrondie de 3,699 à 10^{-3} près.

4. La lecture du tableau de variations montre que puisque f est décroissante sur [0 ; 2] alors pour $x \in [0\,;2]$, $f(x) \leqslant f(0)$ soit $f(x) \leqslant 0$ donc f est négative sur [0 ; 2] ; sur $[2\,;\alpha]$ f est croissante donc pour $x \in [2\,;\alpha]$ on a $f(x) \leqslant f(\alpha)$ soit $f(x) \leqslant 0$. Par conséquent f est négative sur $[0\,;\alpha]$

Sur $[\alpha; 5]$, f est croissante donc pour x appartenant à cet intervalle, $f(x) \geqslant f(\alpha)$ soit $f(x) \geqslant 0$
On a donc bien f positive sur $[\alpha; 5]$.

Partie B

1. La fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{2x}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x+1)$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = 2x$ donc $v'(x) = 2$

On a donc $h'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{x+1} - 2\ln(x+1)}{4x^2} = \dfrac{2x}{x+1} \times \dfrac{1}{4x^2} - \dfrac{2\ln(x+1)}{4x^2} = \dfrac{1}{2x(x+1)} - \dfrac{\ln(x+1)}{2x^2}$

Par conséquent puisque $C_m(x) = \dfrac{x}{4} + 9\dfrac{\ln(x+1)}{2x}$, on obtient

$$C_m'(x) = \frac{1}{4} + 9\left[\frac{1}{2x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{2x^2}\right] = \frac{1}{4} + \frac{9 \times x}{2x^2(x+1)} - \frac{9\ln(x+1)}{2x^2}$$

En simplifiant $\dfrac{f(x)}{2x^2}$, on obtient $\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1)\right) \times \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{x^2}{4x^2} + \dfrac{9x}{2x^2(x+1)} - \dfrac{9\ln(x+1)}{2x^2}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{9 \times x}{2x^2(x+1)} - \frac{9\ln(x+1)}{2x^2} = C_m'(x)$$

On a donc bien $C_m'(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$

2. Le signe de $C_m'(x)$ est celui de $f(x)$ puisque $2x^2 > 0$ sur $]\,0\,;\,5]$

En utilisant les résultats de la **Partie A** sur $f(x)$, on obtient le tableau de variations de C_m suivant :

x	0		α		5
C_m'	$\Vert$	$-$		$+$	
C_m	$\Vert$	$\searrow$	$C_m(\alpha)$	$\nearrow$	

3. Le tableau ci-dessus permet d'affirmer que le coût moyen minimal est obtenu pour α milliers de tonnes de produit.
Le coût moyen minimal est donc $C_m(\alpha)$ et le coût total $\alpha \times C_m(\alpha)$ en millions d'euros
Puisque $\alpha \approx 3{,}699$, on obtient que le coût moyen minimal est d'environ 2,807171 millions d'euros et le coût total 10,383724 millions d'euros, valeurs arrondies à 10^{-6} près c'est à dire à l'euro