BACCALAURÉAT BLANC 2009

<u>Terminale ES</u>

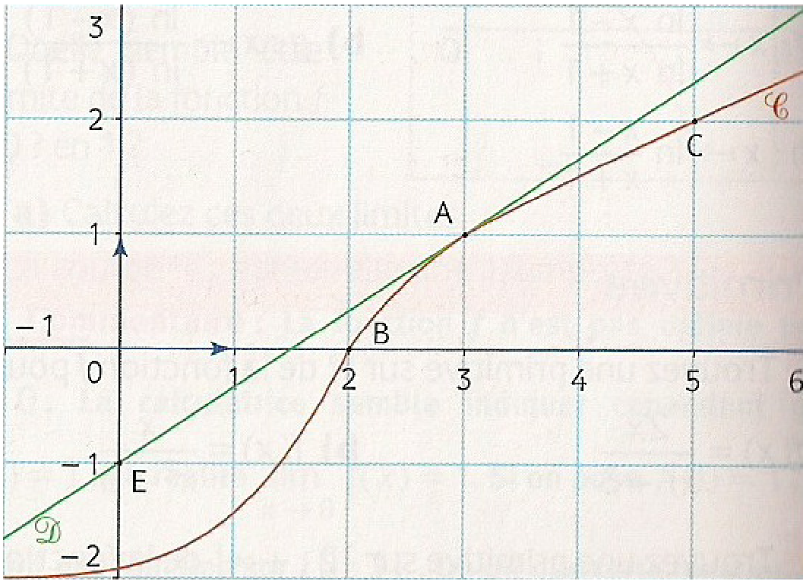
Mathématiques

Spécialité

<u>Mars 2009</u>
Durée : 3 heures

Le sujet comporte 5 *pages numérotées de 1 à* 5
La calculatrice est autorisée.
Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Exercice n° 1 *(sur 5 points)*



La courbe 𝒞 ci-dessus est celle, dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'une fonction f dérivable et strictement croissante sur [– 1 ; 6] : elle passe par les points A (3 ; 1), B (2 ; 0) et C (5 ; 2). La tangente 𝒟 en A passe par E (0 ; – 1).
Le graphique donné pourra être exploité dans tout l'exercice.

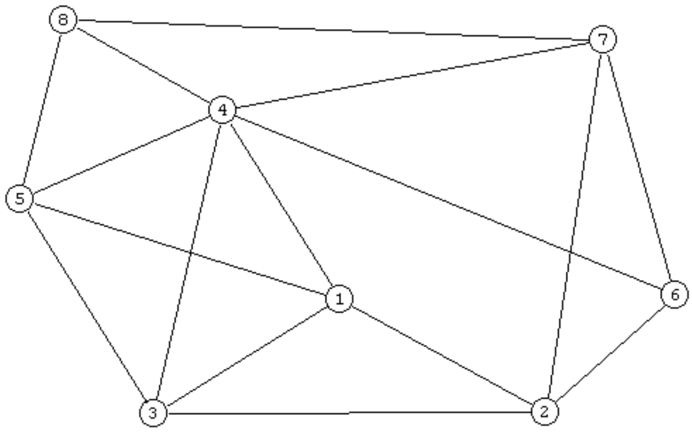
1. Que vaut f ' (3) ?
2. Résoudre graphiquement sur [– 1 ; 6] l'inéquation f(x) ≥ 0

Dans toute la suite, on appelle g la fonction définie par g(x) = ln [f(x)] et C_g sa courbe représentative dans un repère. Toutes les réponses devront évidemment être justifiées.

3. Sur quel intervalle, noté I, g est-elle définie ?
4. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près de g(5).
5. Résoudre dans I l'équation g(x) = 0
6. Quel est le sens de variation de g sur I ?
7. Calculer g ' (3).
8. Que vaut $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x)$? Donner une interprétation graphique du résultat.

Exercice n° 2 *(sur 5 points)*

Une grande surface est conçue de telle façon que huit secteurs, numérotés de 1 à 8, sont reliés par des allées selon le graphe donné ci-dessous où les arêtes représentent les allées existantes entre deux secteurs représentés par les sommets.



1. **a.** Ce graphe est-il complet ? Pourquoi ?
   b. Ce graphe est-il connexe ? Pourquoi ?

2. **a.** Dresser un tableau donnant le degré de chacun des sommets,
   b. Expliquer comment on peut déterminer le nombre total d'arêtes de ce graphe à l'aide de la question précédente. Le donner.

3. **a.** Donner la matrice associée à ce graphe, les sommets étant classés dans l'ordre des numéros croissants.
   b. Expliquer comment on peut connaître le nombre de chemins permettant d'aller du secteur 2 au secteur 5 en parcourant 3 allées. Combien y a-t-il de tels chemins ?

4. Un client décide de parcourir cette grande surface en passant une fois et une seule par chacune des allées.
   a. Justifier que son désir peut être réalisé.
   b. Donner, à l'aide d'un algorithme, un parcours possible.

5. Le directeur de l'établissement désire associer à chaque secteur une couleur de façon à ce que deux secteurs reliés par une allée ne soient pas associés à la même couleur et en utilisant le nombre minimum de couleurs, nombre noté n.
   a. Expliquer pourquoi $n \geq 4$.
   b. Justifier que $n \leq 7$.
   c. proposer à l'aide d'un algorithme un coloriage de ce graphe. Quel est le nombre chromatique du graphe ? Pourquoi ?

Exercice nº 3 *(sur 4 points)*

Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur deux thèmes, Cinéma et Musique.
Cette boîte contient un tiers de questions portant sur le thème Cinéma, les autres portant sur le thème Musique.
Le candidat à ce jeu s'appelle Pierre.

Toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

On pose à Pierre une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :

- la probabilité que Pierre réponde correctement à une question "Cinéma" est $\frac{1}{2}$
- la probabilité que Pierre réponde correctement à une question "Musique" est $\frac{3}{4}$

On note :
C : " la question porte sur le Cinéma"
M : " la question porte sur la Musique"
E : " Pierre répond correctement à la question posée "

1. **a.** Donner $P_M(E)$.
   b. Déterminer la probabilité de l'événement "la question posée porte sur la musique et Pierre y a répondu correctement".
2. Démontrer que la probabilité de E est $\frac{2}{3}$.
3. On suppose que Pierre n'a pas répondu correctement à la question posée.
   Quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le thème "Cinéma" ?

Partie B

En fait, le jeu se déroule de la façon suivante :
on pose à Pierre une question selon les modalités décrites à la **Partie A** et il marque 5 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une 2^{e} question, choisie indépendamment de la première, il marque alors 2 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon le jeu s'arrête et il ne marque aucun point.
À chaque fois qu'une question est posée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Pierre.
   Calculer l'espérance mathématique de cette loi de probabilité et en donner une interprétation.

Exercice nº 4 *(sur 6 points)*

Partie A

On considère la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1)$

1. Démontrer que la dérivée f ' de f est définie par $f'(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$
2. Établir en justifiant le tableau de variations de f sur [0 ; 5].
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [2 ; 5]. Donner un encadrement de α à 10^{-4} près puis la valeur arrondie de α à 10^{-3} près.
4. Justifier alors que f est négative sur $[0 ; \alpha]$ et positive sur $[\alpha ; 5]$

Partie B

Une entreprise fabrique un produit en quantité x exprimé en milliers de tonnes. Le coût moyen de production correspondant à la fabrication de cette quantité x pour $x \in]0 ; 5]$ est donné par la fonction C_m définie par

$C_m(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{9\ln(x+1)}{2x}$.

Les coûts sont exprimés en millions d'euros.

1. Démontrer que $C_m'(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction définie à la **Partie A**
2. Déduire alors en utilisant la **Partie A** le sens de variation de C_m sur]0 ; 5].
3. Pour quelle production, arrondie à la tonne, l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ? Quels sont, arrondis à l'euro, ce coût moyen minimal et le coût total correspondant.