1S1 CORRECTION DU DEVOIR N°4

Exercice n° 1

1. On doit résoudre $\sqrt{x^2 - x} = 2x - 5$

a. Cette expression n'a de sens que si $x^2 - x$ est positif ou nul, c'est à dire puisque $x^2 - x$ est un trinôme du 2^e degré dont les racines sont 0 et 1 (car $x^2 - x = x (x - 1)$) si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

D'autre part $\sqrt{x^2 - x}$ étant un nombre positif ou nul, x ne peut être solution que si $2x - 5$ est également positif ou nul c'est à dire si $x \geq \frac{5}{2}$.

Les deux conditions précédentes se réduisent à $x \in [\frac{5}{2} ; +\infty[$.

Il faut donc chercher d'éventuelles solutions de l'équation (E) sur $D = [\frac{5}{2} ; +\infty[$

b. Sur ce dernier ensemble, les deux membres de l'équation étant des nombres positifs, on sait qu'ils seront égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux.

On obtient donc $x^2 - x = (2x - 5)^2$ ou encore en développant et en réduisant $3x^2 - 19x + 25 = 0$ Cette équation a deux racines $x_1 = \frac{19 - \sqrt{61}}{6}$ et $x_2 = \frac{19 + \sqrt{61}}{6}$.

Mais on a $x_1 \approx 1{,}86 < \frac{5}{2}$ donc $x_1 \notin D$ et x_1 ne convient pas.

Par contre $x_2 \approx 4{,}47 > \frac{5}{2}$ donc $x_2 \in D$ et x_2 convient.

L'équation (E) $\sqrt{x^2 - x} = 2x - 5$ a donc une seule solution $\frac{19 + \sqrt{61}}{6}$.

2. **a.** On a $(x - 5) (ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 5a)x^2 + (c - 5b) x - 5c$

Ce polynôme sera égal à $P(x)$ pour tout x réel si les coefficients des termes de même degré sont égaux c'est à dire si

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 5a = -3 \\ c - 5b = -29 \\ -5c = -30 \end{cases}$$

On obtient facilement en utilisant les trois premières équations : a = 2 ; b = 7 ; c = $5 \times 7 - 29 = 6$ et la 4^e équation est bien vérifiée pour cette valeur de c.

Par conséquent, quel que soit x réel on peut écrire $P(x) = (x - 5) (2x^2 + 7x + 6)$

b. $P(x) = 0$ équivaut donc à $(x - 5) (2x^2 + 7x + 6) = 0$ c'est à dire à $x - 5 = 0$ ou $2x^2 + 7x + 6 = 0$

soit $x = 5$ ou, en résolvant l'équation du 2^e degré, $x = -2$ ou $x = -\frac{3}{2}$

L'équation $P(x) = 0$ a donc trois solutions : -2 ; $-\frac{3}{2}$ et 5

Vu les résultats sur les trinômes du 2^e degré, on peut écrire

$P(x) = (x - 5) \times 2 (x + 2) (x + \frac{3}{2}) = (x - 5) (x + 2) (2x + 3)$ factorisation de $P(x)$ en trois facteurs du 1^{er} degré.

c. Le signe de $P(x)$ dépend du signe de $x - 5$ et de $2x^2 + 7x + 6$, trinôme ayant deux racines : on peut dresser le tableau de signes

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
signe de $x - 5$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $2x^2 + 7x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $P(x) > 0$ si $-2 < x < -\frac{3}{2}$ ou $x > 5$

L'ensemble solution de l'inéquation $P(x) > 0$ est $]-2 ; -\frac{3}{2}[\cup]5 ; +\infty[$

Exercice n° 2

Il y a plusieurs façons de faire les choix : mais attention à ne pas donner des arguments qui conviennent pour plusieurs fonctions. On peut procéder aussi par élimination en rejetant des fonctions qui ne peuvent pas convenir (mais évidemment en justifiant pourquoi). Il faut ici travailler avec les courbes et leur associer une fonction et non travailler avec les fonctions et essayer de leur associer une courbe représentative ce qui est beaucoup plus long. On donne ci-dessous quelques justifications (même si celles-ci n'étaient pas demandées)

La parabole P_2 est tournée vers le bas, donc ne peut être la courbe représentative que de n, q ou r qui ont des coefficients du terme du 2e degré négatifs. Par lecture graphique, on lit que l'image de 0 doit être 1 ce qui exclut r puisque par r(0) = – 1.
D'autre part, l'abscisse du sommet de P_2 est positif ce qui n'est vérifié que pour q (rappel : avec les notations habituelles l'abscisses du sommet est $-\frac{b}{2a}$)
Donc **P_2 est la courbe représentative de la fonction q.**

Les deux autres paraboles ouvertes vers le haut correspondent à des fonctions à choisir parmi, f, g, h et k.

La parabole P_1 correspond à une fonction trinôme ayant une racine double égale à 1 : un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses et par laquelle l'image de 0 est 1. Il faut donc choisir entre k, l et m
Or les discriminants de k et m sont non nuls.
De plus $l(x) = (x - 1)^2$.

P_1 est la donc la courbe représentative de l.

Enfin P_3 ne coupant pas l'axe des abscisses correspond à une fonction ayant un discriminant négatif qui, à l'aide de calculs rapides, ne peut être que f.

P_3 est donc la courbe représentative de f.

Exercice n° 3

Affirmation 1 : On sait que les coordonnées du sommet de la parabole représentant une fonction trinôme du 2e degré de type $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ sont $(-\frac{b}{2a} ; f(-\frac{b}{2a}))$. Ici avec f : $x \longrightarrow x^2 - 2x + 2$, on obtient $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ et f(1) = 1 – 2 + 2 = 1
Le sommet de la parabole représentative de f a pour sommet le point Ω de coordonnées (1 ; 1).
L'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2 Les abscisses des points communs des paraboles représentant les fonctions f et g sont solutions de l'équation $-x^2 + x - 5 = x^2 - 7x + 3$ ou encore $2x^2 - 8x + 8 = 0$ équation du 2e degré de discriminant nul ce qui indique que cette équation n0a qu'une solution et que par conséquent les deux paraboles n'ont qu'un point commun.
L'affirmation 2 est donc vraie
Rem : on peut sans calculer le discriminant remarquer que $2x^2 - 8x + 8 = 0$ *équivaut à* $2(x - 2)^2 = 0$ *ce qui redonne le résultat : une seule solution qui est 2.*

Exercice n° 4

1. La recette est le produit du nombre de places vendues par le prix d'une place.
En tenant compte des données, si le directeur baisse de x fois 0,50 € le prix de la place alors le prix d'une place voudra 8 – 0,5 x euros et à ce prix, il vendra 500 + 100x places.
La recette est alors

$$\mathcal{R}(x) = (8 - 0{,}5x)(500 + 100x) = 8 \times 500 + 8 \times 100x - 0{,}5x \times 500 - 0{,}5x \times 100x$$
$$= 4000 + 800x - 250x - 50x^2$$
$$= -50x^2 + 550x + 4000.$$

On a donc bien $\mathcal{R}(x) = -50x^2 + 550x + 4000$.

2. $\mathcal{R}$ est une fonction trinôme définie sur] 0 ; + ∞ [avec a = – 50, b = 550 et c = 4000 et $\frac{-b}{2a} = \frac{-550}{-100} = 5{,}5$: a étant négatif, on sait que $\mathcal{R}$ va être croissante sur] 0 ; 5,5] et décroissante sur [5,5 ; + ∞ [

3. On peut dresser le tableau de variations de $\mathcal{R}$ sur [0 ; + ∞ [

x	0	5,5	+ ∞
Variations de $\mathcal{R}$	‖ ↗		↘

On en déduit que la recette est maximale lorsque x vaut 5,5

Cela correspond à un prix d'entrée de $8 - 0{,}5 \times 5{,}5 = 5{,}25$ € et à un nombre de places vendues de $500 + 5{,}5 \times 100$ soit 1050 entrées.
La recette maximale vaut donc $1050 \times 5{,}25$ soit 5512,5 € obtenue pour un prix d'entrée de 5,25 €
Rem : cette recette est aussi égale à $\mathcal{R}(5{,}5)$