

TES3 SPÉCIALITÉ CORRECTION DEVOIR ESPACE N° 1

Exercice n° 1

Les coordonnées de \overrightarrow{ML} sont (2 ; 3 ; 1) et celles de \overrightarrow{NL} sont (1 ; - 2 ; 1) : ces coordonnées ne sont pas proportionnelles (car $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$) ; les vecteurs \overrightarrow{ML} et \overrightarrow{NL} ne sont donc pas colinéaires ce qui signifie que les points L, M et N ne sont pas alignés

Remarque : on peut évidemment raisonner avec les coordonnées de n'importe quels vecteurs obtenus à partir des points L, M et N.

Une équation cartésienne du plan (LMN) est de la forme $ax + by + cz = d$: on doit donc déterminer les coefficients a, b, c et d

Puisque $L \in (LMN)$, ses coordonnées vérifient l'équation donc $a + b + c = d$

De même $M \in (LMN)$ donc $-a - 2b = d$

Enfin $N \in (LMN)$ donc $3b = d$

a, b, c et d sont donc solution du système
$$\begin{cases} a + b + c = d \\ -a - 2b = d \\ 3b = d \end{cases}$$

Il y a une inconnue de plus que d'équations : on peut donc fixer la valeur d'une des inconnues.

Prenons $d = 3$ alors la dernière équation donne $b = 1$, la seconde devient $-a - 2 = 3$ soit $a = -5$ et la première permet d'obtenir $c = 7$

Une équation du plan (LMN) est donc $-5x + y + 7z = 3$ ou bien $5x - y - 7z + 3 = 0$

Exercice n° 2

1. a. Un point d'intersection de P et D aura des coordonnées (x ; y ; z) vérifiant à la fois l'équation de P et le système représentant D donc vérifiant le système
$$\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 4 \\ 2x - y - 3 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

b. On résout le système à l'aide de la calculatrice et on obtient $x = 3$; $y = 3$ et $z = -\frac{1}{2}$.

Conclusion : le plan P et la droite D ont un seul point commun : P et D sont sécants et leur point d'intersection est le point A de coordonnées $(3 ; 3 ; -\frac{1}{2})$

Remarque : attention en entrant les données dans la calculatrice : la 2^e équation doit se mettre sous la forme $2x - y = 3$ et les coefficients à entrer sont donc successivement 2 ; - 1 ; 0 et 3

On peut aussi résoudre ce système par substitution ; les 2^e et 3^e équation ne faisant apparaître que deux des inconnues.

2. a. On a $\overrightarrow{AB} (1 ; 2 ; -\frac{1}{2})$. On sait que dans un repère orthonormal, la distance AB est donnée par

$$AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

b. Pour prouver que B est sur D, il suffit de voir si ses coordonnées vérifient le système représentant D. On obtient $2 \times 4 - 5 - 3 = 8 - 8 = 0$: la 1^{ère} équation est vérifiée

De même $4 - 2 - 2 = 0$: la 2^e équation est vérifiée.

Le point B est bien situé sur D

c. Tout plan parallèle à P a une équation de la forme $5x - 3y + 4z = d$

On détermine d pour que ce plan passe par B : il faut $5 \times 4 - 3 \times 5 + 4 \times (-1) = d$ donc $d = 1$

Une équation cartésienne du plan parallèle à P passant par B est $5x - 3y + 4z = 1$

Exercice n° 3

1. les coefficients de $P_1 : 3; 5$ et 5 et ceux de $P_2 : 4; 2$ et 6 ne sont pas proportionnels car $\frac{3}{4} \neq \frac{5}{2}$. Par conséquent les plans ne sont pas parallèles autrement dit ils sont sécants et leur intersection est une droite.

Remarque : l'équation de P_2 peut se simplifier en $2x + y + 3z = 6$, équation avec laquelle on travaillera dorénavant. Les coordonnées de points à chercher sont évidemment inchangées.

2. Si A est l'axe des abscisses (xx') alors ses coordonnées sont de la forme $(x; 0; 0)$. Comme $A \in P_1$ alors son abscisse est telle que $3x + 5 \times 0 + 5 \times 0 = 15$ soit $x = 5$
Les coordonnées de A sont donc $(5; 0; 0)$.
De même pour B intersection de l'axe des ordonnées avec P_1 on obtient $5y = 15$ et $y = 3$: donc $B(0; 3; 0)$
Le point C a une abscisse et une ordonnée nulles et on obtient $z = 3$. Donc $C(0; 0; 3)$

De même pour les points d'intersection de P_2 avec les axes, on obtient $D(3; 0; 0)$; $E(0; 6; 0)$ et $F(0; 0; 2)$
D'où la représentation des plans par les traces sur les plans de base : voir figure ci-dessous, P_1 en orange et P_2 en vert.

3. a. Les points A et B étant le premier sur (xx') et le second sur (yy') sont tous les deux dans le plan (xOy) donc la droite (AB) est dans ce plan.
Pour les mêmes raisons la droite (DE) est aussi dans le plan (xOy). Par conséquent les droites (AB) et (DE) sont coplanaires.
De plus on a $\overrightarrow{AB}(-5; 3; 0)$ et $\overrightarrow{DE}(-3; 6; 0)$: \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DE} ont des coordonnées non proportionnelles, donc ne sont pas colinéaires ce qui indique que les droites (AB) et (DE) ne sont pas parallèles. Comme elles sont coplanaires, elles sont donc sécantes en un point I.

Remarque : la non colinéarité des vecteurs ne suffit pas seule pour justifier que les droites sont sécantes : la coplanarité est indispensable. Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-5; 3; 0)$ et $\overrightarrow{DF}(-3; 0; 2)$ ne sont pas colinéaires mais les droites (AB) et (DF) ne sont pas sécantes car elles ne sont pas coplanaires.

- b. Pour des raisons identiques en utilisant le plan (yOz), on prouve que (BC) et (EF) sont coplanaires et non parallèles donc sont sécantes en un point J.
Le point I est sur (AB) donc dans P_1 car (AB) est située dans P_1 . De même comme $I \in (DE)$ et que (DE) est située dans P_2 alors I est aussi un point de P_2 : donc I est un point appartenant aux deux plans : c'est donc un point de la droite d'intersection de P_1 et P_2 .
Pour des raisons identiques, J est aussi un point de $P_1 \cap P_2$.
Par conséquent la droite d'intersection de P_1 et P_2 passe par I et J : c'est donc la droite (IJ)

c.

α . Puisque I est dans le plan (xOy), sa cote est nulle.

β . Puisque I est dans P_1 et P_2 ses coordonnées $(x; y; 0)$ vérifient les équations de P_1 et P_2 donc le système
$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$
 qu'on résout facilement pour trouver que les coordonnées de I sont $(\frac{15}{7}; \frac{12}{7}; 0)$

