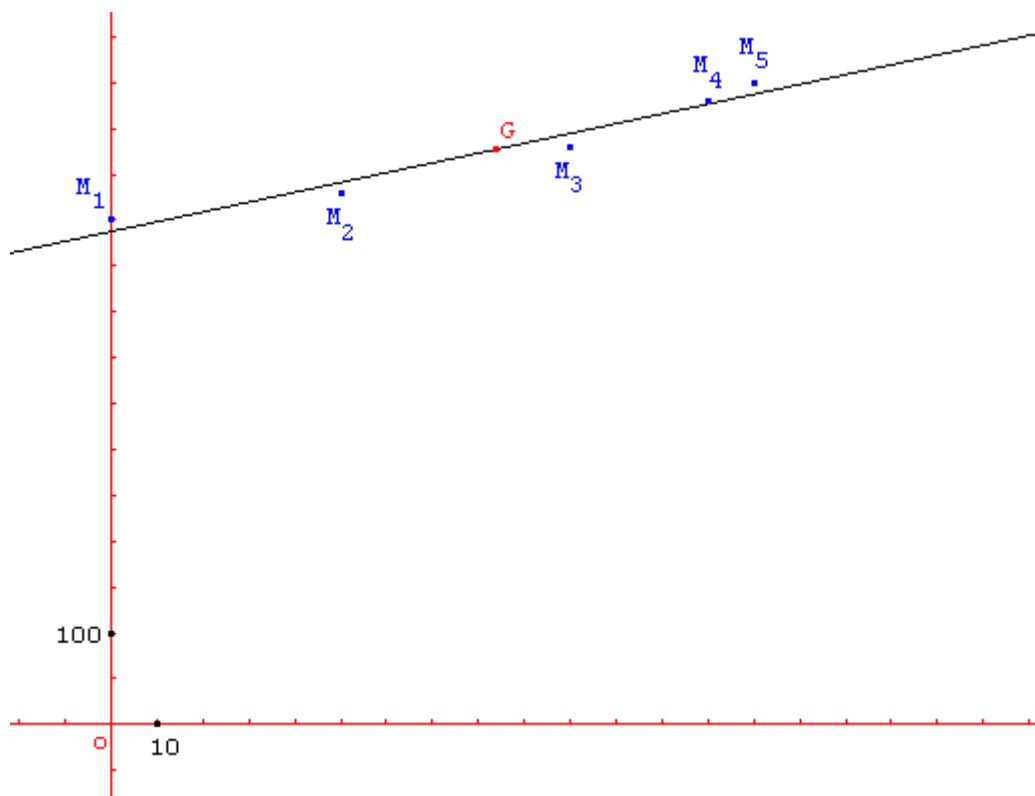


Éléments de correction du devoir type bac

Exercice n° 1

Partie A

1.



2. G (84 ; 314)

3. $y = 0,53 x + 269$

4. L'an 2000 correspond à $x = 150$ d'où $y \approx 0,53 \times 150 + 269 \approx 348,5$. On obtient une teneur en CO_2 estimée à 348,5 ppm en 2000.

5. Alors que la teneur en CO_2 semble augmenter inexorablement, la prévision par cet ajustement affine donne une teneur moindre en 2000 qu'en 1990 : on peut légitimement supposer que cet ajustement n'est pas vraiment bien adapté à la situation.

Partie B

1.

Année	1850	1900	1950	1980	1990
Rang x_i de l'année	0	50	100	130	140
$z_i = \ln (y_i - 250)$	3,2189	3,6889	4,1744	4,4998	4,6052

2. G' (84 ; 4,0374)

3. $z = 0,0099 x + 3,2056$

4. Puisque $z = \ln (y - 250)$ alors $\ln (y - 250) = 0,0099 x + 3,2056$ et $y - 250 = e^{0,0099 x + 3,2056}$ c'est à dire $y - 250 = e^{0,0099 x} \times e^{3,2056}$ soit encore $y = e^{3,2056} \times (e^{0,0099})^x + 250$ et en calculant comme demandé des coefficients arrondis à 10^{-4} près, on trouve

$$y = 250 + 24,6703 \times 1,0099^x$$

En 2000, le rang donc x vaut 150 et $y \approx 250 + 24,6703 \times 1,0099^{150} \approx 358$. En 2000, cet ajustement laisse prévoir une teneur en CO_2 d'environ 358 ppm

Pour 2010, le rang est 160 et $y \approx 250 + 24,6703 \times 1,0099^{160} \approx 369$.

En 2010, on peut prévoir une teneur en CO_2 d'environ 369 ppm.

Exercice n° 2

Affirmation 1 : F monotone sur [0 ; 3] signifie que F ne change pas de sens de variation sur cet intervalle ce que la courbe représentative de F contredit (F est croissante sur [0 ; 2] et décroissante sur [2 ; 3] : l'affirmation 1 est donc fausse.

Affirmation 2 : F ' (a) , nombre dérivé de F en a , est , graphiquement , le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse a . Donc F ' (2) est le coefficient directeur de la tangente en H qui d'après l'énoncé est horizontale ce qui signifie que F ' (2) = 0 ≠ 4 : l'affirmation 2 est donc fausse.

Affirmation 3 : F est une primitive de f sur [- 2 ; 4] signifie que f est la dérivée de F sur cet intervalle . La courbe représentative de F montre que , sur [2 ; 4] , F est une fonction décroissante ce qui implique que sa dérivée , f , est négative sur [2 ; 4] : l'affirmation 3 est donc vraie.

Affirmation 4 : par définition F étant une primitive de f sur [a ; b] on sait que $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Par conséquent : $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2$ (d'après les données)

L'affirmation 4 est donc vraie.

Affirmation 5 : par définition la valeur moyenne de f sur [a ; b] est $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

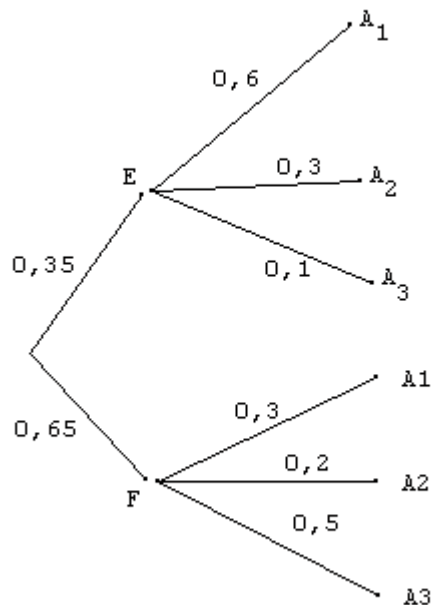
Ici la valeur moyenne de f sur [- 1 ; 3] est donc

$$\frac{1}{3 - (-1)} \int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{1}{4} (F(3) - F(-1)) = \frac{1}{4} (2 - 4) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

L'affirmation 5 est donc vraie.

Exercice n° 3

1.



2. a. On a $p(F \cap A_1) = p(F) \times p_F(A_1) = 0,65 \times 0,3 = 0,195$

(attention à ne pas confondre $p(A_1)$ qu'il faudra calculer à la 2^e question avec $p_F(A_1)$ qui est donné dans l'énoncé – c'est la phrase "30% des ordinateurs équipés de carte mère Futura sont munis d'un processeur Avenir" –)

b. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(A_1) = P(E \cap A_1) + p(F \cap A_1) = 0,35 \times 0,6 + 0,195 = 0,405$$

c. La probabilité demandée est la probabilité que l'ordinateur soit équipé de Futura sachant qu'il a un processeur Avenir c'est à dire $p_{A_1}(F)$

$$\text{On sait que } p_{A_1}(F) = \frac{p(A_1 \cap F)}{p(A_1)} = \frac{0,195}{0,405} \approx 0,481$$

La probabilité cherchée est donc environ 0,481 arrondie à 10^{-3} près **comme il est demandé dans l'énoncé.**

3. a. Appelons succès, noté S, l'événement " l'ordinateur est muni du processeur Avenir"

$$\text{On a } P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,405 = 0,595$$

et l'évènements contraire de celui dont il est question dans l'énoncé est " aucun des trois ordinateurs n'est muni du processeur Avenir" dont la probabilité est $0,595^3$ puisque les ordinateurs sont testés successivement de manière indépendante.

Par conséquent la probabilité de l'événement " qu'au moins un des ordinateurs soit muni du processeur Avenir ?" est $1 - 0,595^3 \approx 0,789$.

Remarque : on peut refaire un arbre dont les branches sont S et \overline{S} (en fait A_1 et $\overline{A_1}$), répétées 3 fois (8 branches en tout) ; la probabilité sur chaque branche S étant 0,405 et sur chaque branche \overline{S} étant 0,595)

b. En raisonnant de la même façon, lors du test de n ordinateurs, la probabilité qu' "aucun des trois ordinateurs ne soit muni du processeur Avenir" est $0,595^n$

D'où la probabilité qu'au moins un soit muni du processeur Avenir est : $1 - 0,595^n$ et on cherche n tel que

$$1 - 0,595^n \geq 0,99 \text{ ce qui donne } 0,595^n \leq 0,01$$

d'où $\ln(0,595^n) \leq \ln 0,01$

soit $n \ln 0,595 \leq \ln 0,01$ et puisque $\ln 0,595 < 0$ car $0,595 < 1$, on obtient

$$n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,595} \text{ ou encore } n \geq 8,869$$

Conclusion : il faut tester 9 ordinateurs au moins pour que la probabilité qu'au moins un parmi ceux-là soit muni du processeur Avenir soit supérieure ou égale 0,99.

4. a. D'après les données de l'énoncé, l'assembleur va gagner 450€ pour un ordinateur muni du processeur Avenir, donc il va gagner 450€ avec une probabilité égale à $P(A_1)$ qui vaut 0,405 d'après 2.b.

De même, il peut gagner 250€ avec une probabilité égale à $P(A_2)$ qui vaut $0,35 \times 0,3 + 0,65 \times 0,2 = 0,235$ et enfin il peut gagner 120€ avec une probabilité égale à $P(A_3) = 0,35 \times 0,1 + 0,65 \times 0,5 = 0,36$

La loi de probabilité du gain de l'assembleur est résumée dans le tableau ci-dessous :

Valeur du gain (en euros)	120	250	450
Probabilité du gain	0,36	0,235	0,405

b. L'espérance de gain de l'assembleur pour l'assemblage d'un ordinateur est

$$0,36 \times 120 + 0,235 \times 250 + 0,405 \times 450 = 284,20 \text{ €}$$

Par conséquent pour 45 ordinateurs, l'assembleur peut espérer un gain de $45 \times 284,2$ soit 12789 €

Exercice n° 4

Partie A

1.a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3) = +\infty$

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2) = -\infty$ et par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^X = 0$

Par conséquent par somme on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Cherchons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 3))$

On a $f(x) - (x + 3) = e^{-x+2}$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+2} = 0$ d'après 1.a.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 3)) = 0$ signifie que la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe représentative de f , ce qu'il fallait démontrer.

2.

a. La dérivée de $x \mapsto x + 3$ est $x \mapsto 1$

D'autre part, e^{-x+2} est du type $e^{u(x)}$ dont la dérivée est de la forme $u' e^u$

Ici on obtient, puisque la dérivée de $x \mapsto -x + 2$ est $x \mapsto -1$, la dérivée de $x \mapsto e^{-x+2}$ est $x \mapsto -e^{-x+2}$

Par somme, on obtient alors $f'(x) = 1 - e^{-x+2}$

b. Étudions le signe de $f'(x)$.

On a $1 - e^{-x+2} \geq 0$ équivaut à $1 \geq e^{-x+2}$ soit, en prenant le \ln de chacun des membres, qui sont strictement positifs et puisque la fonction \ln est croissante sur \mathbb{R}^*_+ , $\ln 1 \geq \ln e^{-x+2}$ c'est à dire $0 \geq -x + 2$

On obtient donc $x \geq 2$

Par conséquent $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 2$

On peut donc conclure que sur $[0 ; 2]$, f est une fonction décroissante puisque sur cet intervalle sa dérivée est négative et f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

c.

x	0	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0 +
variations de f	$3 + e^2$	↘	6 ↗ $+\infty$

3. Sur l'intervalle $[2 ; 6]$, d'après ce qui précède, f est une fonction strictement croissante puisqu'elle l'est sur $[2 ; +\infty[$.

De plus c'est une somme de fonctions continues : elle est donc continue.

On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires

Sur cet intervalle f prend une seule fois toute valeur comprise entre $f(2)$ soit 6 et $f(6) = 9 + e^{-4} > 9$ car $e^{-4} > 0$

Comme $6 < 8 < 9 + e^{-4}$, on peut affirmer qu'il existe un seul nombre α dans $[2 ; 6]$ tel que $f(\alpha) = 8$

Autrement l'équation $f(x) = 8$ a une unique solution dans l'intervalle $[2 ; 6]$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $4,94 < \alpha < 4,95$ puisque $f(4,94) \approx 7,99286 < 8$ et $f(4,95) \approx 8,0023 > 8$

Partie B

1. En tenant compte des unités, le coût de fabrication de 600 objets est donné en centaines d'euros par $f(6) = 9 + e^{-4}$ soit environ 9,0183 centaines d'euros ou puisqu'on demande d'arrondir à l'euro : le coût de fabrication de 600 objets est de 902 euros.

Le coût de fabrication d'un objet est donc dans ce cas de $\frac{902}{600} \approx 1,50$ arrondi au centime d'euros.

Pour 1000 objets on obtient en raisonnant de même un coût de fabrication d'environ 1300 € et un coût de fabrication d'un objet de 1,30€

Pour 1200 objets on obtient un coût de fabrication d'environ 1500€ et un coût de fabrication d'un objet de 1,25.

2. La recherche du nombre d'objets à fabriquer pour que le coût de production soit 800 € revient à trouver x tel que $f(x) = 8$. Comme $x \in [1 ; 20]$ et d'après les variations de f on voit que pour $x \in [1 ; 2]$, puisque f est décroissante $f(x) \leq f(1)$. Or $f(1) = 4 + e^1 \approx 6,72$. Donc sur cet intervalle, le coût de fabrication n'atteint pas 8 centaines d'euros.

Sur $[2 ; 20]$ d'après la question **Partie A. 3.** seule la valeur α donne un coût de fabrication égal à 8 centaines d'euros puisque si $x > 6$, alors $f(x) > f(6)$ donc $f(x) > 9,018$

Par conséquent le nombre d'objets à fabriquer est, arrondi à l'unité, 494 ou 495.

Mais d'après les calculs effectués à cette question le coût de fabrication correspondant à 494 objets est environ 799,29 € et celui correspondant à 495 objets est environ 800,23 €. De ces deux coûts le plus proche de 800 € est le second puisque $800 - 799,29 > 800,23 - 800$

Pour avoir un coût de fabrication le plus proche possible de 800 €, il faut fabriquer 495 objets.

3. D'après les variations de la fonction f , on peut affirmer que sur $[1 ; 20]$, le coût de fabrication sera minimal pour la fabrication de 200 objets et que ce coût minimum vaudra 600 €

Partie C

La fonction g est de la forme $\frac{u}{v}$ de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

$$u(x) = f(x) = x + 3 + e^{-x+2} \text{ et } u'(x) = 1 - e^{-x+2}$$

$$v(x) = x \text{ et } v'(x) = 1$$

On obtient donc

$$g'(x) = \frac{(1 - e^{-x+2}) \times x - (x + 3 + e^{-x+2})}{x^2} = \frac{x - x e^{-x+2} - x - 3 - e^{-x+2}}{x^2} = \frac{-x e^{-x+2} - 3 - e^{-x+2}}{x^2} = -\frac{x e^{-x+2} + 3 + e^{-x+2}}{x^2}$$

Or $x^2 > 0$; $x > 0$ car $x \in [1 ; 20]$ et $e^{-x+2} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur son ensemble de définition.

Par conséquent le dénominateur de $g'(x)$ est positif, son numérateur aussi comme somme et produit de nombres positifs et la présence du signe $-$ prouve que sur $[1 ; 20]$ la dérivée de g est négative ce qui signifie que la fonction coût moyen est décroissante sur $[1 ; 20]$